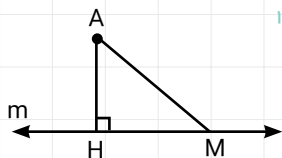


با پوش رمزینه
سه مجموعه
قبل را ببینید.



طول پاره‌خط را تعریف کنیم. اگر A و B دو نقطه انتهایی پاره‌خط AB باشند، آنگاه فاصله بین A و B را اندازه پاره‌خط AB می‌نامیم. اما در اینجا به دنبال فاصله یک نقطه از یک خط و تعمیم آن به فاصله نقطه از نیم‌خط و پاره‌خط هستیم.

فرض کنید مانند شکل ۱، نقطه A و خط m در یک صفحه قرار دارند. نقطه A روی خط m نیست. چگونه از نقطه A عمودی بر خط m رسم می‌کنید؟



به‌طور شهودی به کمک یک گونیا این کار امکان‌پذیر است، اما بعداً خواهیم دید که به کمک پرگار و خط‌کش روشی

قبلاً با فاصله بین دو نقطه در اولین مجموعه‌های این مقاله‌ها آشنا شده‌اید. اگر خطی را که از دو نقطه A و B می‌گذرد به محور تبدیل کنیم و طول نقطه A برابر a و طول نقطه B برابر b باشد، آنگاه فاصله بین A و B را که به AB نشان می‌دهیم، به صورت $AB = |b - a|$ تعریف می‌کنیم. این علامت دو پاره‌خط عمودی «قدر مطلق» نامیده می‌شود و به این معنی است که حاصل درون آن هر عددی باشد ما آن را مثبت در نظر می‌گیریم؛ مثلاً: $|-5| = 5$. پس اگر طول نقطه A برابر -7 و طول نقطه B برابر 10 باشد، آنگاه فاصله بین A و B برابر است با: $AB = |10 - (-7)| = |10 + 7| = 17$. اگر طول نقطه A برابر -3 و طول نقطه B برابر -4 باشد، فاصله A و B چقدر است؟ اکنون که مروری بر فاصله بین دو نقطه داشتیم، به‌سادگی می‌توانیم اندازه یا

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

نامساوی‌ها در هندسه

● محمود نصیری

اکنون می‌خواهیم مجموعه چهارم مقاله‌هایی را شروع کنیم که در مورد مفهوم‌های هندسی دنبال می‌کردیم. در سه مجموعه قبلی به مفهوم‌های اولیه هندسه پرداختیم و تعریف‌های اساسی در مثلث، به‌ویژه عمودمنصف، ارتفاع، میانه و نیمساز را بیان کردیم. همچنین یک بخش اساسی هندسه را که درباره هم‌نهشتی مثلث‌هاست، با مثال‌های متنوع توضیح دادیم. به همین ترتیب، هم‌نهشتی مثلث‌های خاص، مانند مثلث قائم‌الزاویه و مثلث متساوی‌الساقین را نیز بررسی کردیم. سرانجام هم با بررسی ویژگی‌هایی از عمودمنصف و ارتفاع در مثلث و همچنین در مورد بعضی روش‌های اثبات، مطالب و مثال‌هایی را بیان کردیم. در واقع ارتفاع‌ها را عمودها بر پاره‌خط‌ها و به‌ویژه ضلع‌های مثلث، و نیمسازها و میانه‌ها را منصف‌ها یا نصف‌کننده‌های زاویه‌ها و پاره‌خط‌ها می‌نامیم. عمودمنصف می‌تواند در هر دو دسته باشد، زیرا هم بر پاره‌خط‌ها عمود است و هم آن‌ها را نصف می‌کند. بعد از ویژگی‌های عمودمنصف و ارتفاع که قبلاً با آن‌ها آشنا شدیم، نوبت به نیمساز و میانه می‌رسد. اما چون برای بررسی ویژگی‌های نیمساز، به مفهوم فاصله نقطه از خط نیاز داریم و همچنین مقایسه پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها از نظر اندازه‌های آن‌ها با هم در هندسه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، ابتدا اجازه بدهید در مورد فاصله کمی بیشتر توضیح دهیم.

همراه با اثبات می‌توانیم برای رسم آن بیان کنیم.

حال اگر H پای عمودی باشد که از A بر خط m رسم شده‌است، آنگاه اندازه AH که کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از نقطه‌های خط m است، فاصله نقطه A از خط m نامیده می‌شود.

در اینجا واژه‌های کوتاه‌ترین فاصله نقطه از خط را به کار بردیم، آیا می‌توانید آن را توضیح دهید؟

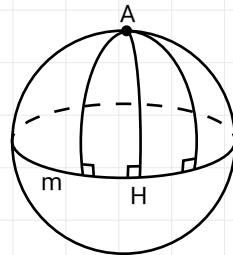
اگر نقطه M هر نقطه دیگری از خط m به غیر از نقطه H باشد، شاید به‌طور شهودی و یا اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، بیان کنید که همواره: $AM > AH$. اما هندسه بر اساس یک دسته اصل‌ها و قضیه‌ها بیان شده

است. یا باید مفهومی را بدون اثبات بپذیریم که آن را «اصل» می‌نامیم، یا در غیر این صورت باید آن را ثابت کنیم. امروزه با پیشرفت علوم و کشف هندسه‌های گوناگون که حتی بعضی کاربردی کمتر از هندسه اقلیدسی که در متوسطه می‌خوانیم ندارند، نباید فقط به جنبه شهودی هندسه توجه کنیم.

ریاضی‌دان معروفی به نام **ژان دیودونه** در مقاله‌ای می‌نویسد: «هندسه با خارج شدن از مرزهای سنتی خود، قدرت‌های پنهان، انعطاف‌پذیری و قابلیت انطباق‌پذیری فوق‌العاده‌اش را آشکار کرده و به یکی از پرکاربردترین و جهانی‌ترین ابزار در همه شاخه‌های ریاضی تبدیل شده است.»

بنابراین ما امروزه نباید ذهن خود را فقط به مشاهده‌های کوچکی که در اطرافمان رخ می‌دهند معطوف کنیم، بلکه باید هر مفهومی را چنان مورد مطالعه قرار دهیم که اگر تغییراتی در بعضی اصل‌های آن موضوع داده شد، بتوانیم به‌خوبی آن را تجزیه و تحلیل کنیم. برای آنکه موضوع کمی روشن‌تر شود، مثالی ساده می‌زنیم: در اولین مجموعه از این مقاله‌ها توضیح دادیم که خط یکی از مفهومی تعریف نشده است (مجله شماره ۱، دوره ۲۷، مهر ۱۴۰۰، صفحه ۴) و هر جا منظور

خود را از خط بیان می‌کنیم، در آنجا مثالی از هندسه روی کره زمین آورده‌ایم که ما روی آن زندگی می‌کنیم. خط‌ها را دایره‌هایی روی کره زمین در نظر گرفتیم که مرکز این دایره‌ها روی مرکز کره زمین واقع‌اند. بنابراین خط m که همان خط استوا است، یکی از این خط‌های ما در این هندسه است. اکنون نقطه A را روی قطب مثلاً قطب شمال در نظر می‌گیریم (شکل ۲). در اینجا اگر خطی را که از A بر m عمود می‌شود خط AH بنامیم، AH کمترین فاصله نقطه A از خط m است. اما بر خلاف مثال قبلی که در هندسه اقلیدسی بیان کردیم، این پاره‌خط AH یکتا نیست، بلکه بی‌شمار نقطه روی خط m وجود دارند که نقطه A از همه آن‌ها به یک فاصله است.



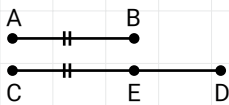
شکل ۲

در واقع مانند آن است که بی‌شمار خط عمود از نقطه A بر خط m رسم شده باشند. در حالی که در مثال قبلی فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم (شکل ۱) و پاره‌خط‌های دیگر مانند AM همه به گونه‌ای هستند که: $AM > AH$. این تفاوت اساسی ناشی از قضیه مهمی است که به «قضیه زاویه بیرونی» معروف است و به زودی آن را ثابت خواهیم کرد. اما قبل از آن مفهومی اولیه نامساوی‌ها را در هندسه که در رابطه با پاره‌خط و زاویه هستند، بیان می‌کنیم. به کمک این قضیه می‌توانیم نامساوی $AM > AH$ را نیز ثابت کنیم. برای بررسی نامساوی‌ها در مثلث، مقدمه‌هایی را توضیح می‌دهیم.

تاکنون با مطالعه هندسه با هم‌نهشتی پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها، یعنی مساوی بودن اندازه‌ها، سروکار داشته‌ایم. همچنین بیان کردیم تحت چه شرایطی دو

پاره‌خط یا دو زاویه هم‌نهشت‌اند. در واقع هم‌نهشتی دو پاره‌خط یا دو زاویه را با مساوی بودن اندازه‌های آن دو پاره‌خط یا دو زاویه مقایسه کردیم. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم تحت چه شرایطی پاره‌خطی از پاره‌خط دیگری بزرگ‌تر یا کوچک‌تر است. همچنین اینکه زاویه‌ای از زاویه دیگر کوچک‌تر یا بزرگ‌تر است به چه معنی است. شاید چنین تصور کنید که برای مقایسه بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن پاره‌خط‌ها یا زاویه‌ها، می‌توانیم آن‌ها را در کنار هم چنان قرار دهیم که با یکدیگر مقایسه شوند. اما می‌دانیم که در اثبات‌ها و حل مسئله‌ها امکان چنین ابزاری وجود ندارد. پس باید ابزاری در دست داشته باشیم که بتوانیم به سادگی آن‌ها را مقایسه کنیم. از ابتدا عددهای حقیقی را همان‌گونه که در جبر می‌پذیریم و از آن‌ها استفاده می‌کنیم، در هندسه نیز می‌پذیریم و برای تعریف اندازه‌ها آن‌ها را به کار می‌بریم؛ همان‌گونه که برای هم‌نهشتی دو پاره‌خط و دو زاویه به کار بردیم. بنابراین می‌گوییم:

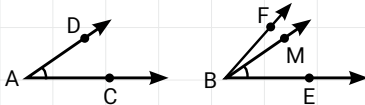
$\angle A$ کوچک‌تر از $\angle B$ است، هرگاه $m\angle A < m\angle B$ باشد. کوچک‌تر از $\angle B$ باشد. $\angle A < \angle B$ ، هرگاه: $m\angle A < m\angle B$. یعنی اندازه $\angle A$ کوچک‌تر از اندازه $\angle B$ باشد. به همین ترتیب برای دو پاره‌خط داریم: پاره‌خط AB کوچک‌تر از پاره‌خط CD است، هرگاه اندازه AB کوچک‌تر از اندازه CD باشد؛ یعنی: $AB < CD$ هرگاه: $AB < CD$. می‌توانیم آن‌ها را به صورت شکل ۳ نیز نشان دهیم و بنویسیم:



شکل ۳

$AB < CD$ ، هرگاه نقطه‌ای مانند E بین C و D وجود داشته باشد، به‌طوری که: $AB = CE$.

شکل ۴



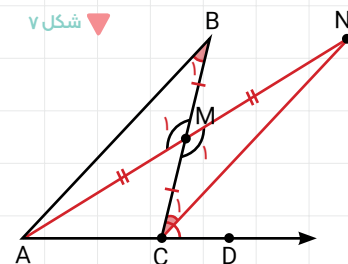
$\angle CAD < \angle EBF$ ، هرگاه نقطه‌ای مانند M درون $\angle EBF$ وجود داشته باشد که: $m\angle CAD = m\angle EBM$ (شکل ۴).

لازمه مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه مزبور این است که دو مثلث هم‌نهشت داشته باشیم. حال اگر M وسط ضلع BC را هم در نظر بگیریم، چون: $MB=MC$ ، پس می‌توانند پاره‌خط‌های MB و MC دو ضلع این دو مثلث هم‌نهشت باشند. این اطلاعات به ما کمک می‌کنند که دو مثلث هم‌نهشت ABM و MCN را بسازیم. اکنون به اثبات قضیه بسیار نزدیک شده‌ایم. این دو مثلث هم‌نهشت را با اطلاعاتی که داریم می‌سازیم. M وسط ضلع BC را در نظر می‌گیریم و از A به M وصل می‌کنیم و به اندازه خودش تا نقطه N امتداد می‌دهیم؛ یعنی: $AM=MN$. اکنون اگر از N به رأس C متصل کنیم، داریم: $\triangle ABM \cong \triangle NCM$. چرا؟ بنا بر کدام حالت هم‌نهشتی این دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ احتمالاً درست حدس زده‌اید: (ض-ض). $\angle M_1 \cong \angle M_2$ ، $AM=MN$ و $MB=MC$.

از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم که: $\angle B \cong \angle C_1$. البته $\angle C_1$ همان $\angle MCN$ است. چون N درون $\angle BCD$ است، پس: $\angle DCM > \angle C_1$. در نتیجه: $\angle DCM > \angle B$ و این همان فرضی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. اثبات قضیه زاویه بیرونی به وضوح وابسته به اصل‌ها و قضیه‌هایی است که تا کنون بدون استفاده از «اصل توازی» ثابت کرده‌ایم. اگر ما اصل توازی یا «اصل زاویه‌های متبادل» را که معادل هم هستند بپذیریم، آنگاه به سادگی ثابت می‌کنیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر مثلث برابر 180° درجه است. در این صورت اثبات قضیه زاویه بیرونی واضح است، زیرا: $m\angle DCB = 180^\circ - m\angle C$. پس: $m\angle DCB = m\angle A + m\angle B > m\angle B$ به همین ترتیب برای $\angle A$ ثابت می‌شود. با توجه به اهمیتی که قضیه زاویه بیرونی دارد، در شماره بعدی توضیح‌های بیشتری در مورد آن خواهیم داد.

اندازه‌های زاویه‌های بیرونی فقط در هر رأس یکی را در نظر می‌گیریم که بعداً نشان خواهیم داد این مجموع برابر 360° درجه است. وقتی زاویه بیرونی یک رأس مثلث را در نظر می‌گیریم، دو زاویه درونی دیگر را زاویه‌های درونی غیرمجاور آن می‌نامیم. قضیه مهمی را که اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم در رابطه با همین اندازه‌های زاویه بیرونی و زاویه‌های درونی غیرمجاور است. این قضیه به صورت زیر است:

قضیه زاویه بیرونی: در هر مثلث اندازه هر زاویه بیرونی از اندازه هر زاویه درونی غیرمجاور آن بزرگ‌تر است.
اثبات: آنچه را به عنوان فرض داریم و آنچه را که باید ثابت کنیم با نمادهای ریاضی می‌نویسیم. در $\triangle ABC$ ، $\angle DCB$ زاویه بیرونی نظیر رأس C است (شکل ۷). $\angle B$ و $\angle A$ زاویه‌های درونی غیرمجاور $\angle C$ از $\triangle ABC$ هستند. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\angle DCB > \angle A$ و $\angle DCB > \angle B$ ، اولی را ثابت می‌کنیم و دومی مشابه آن است.

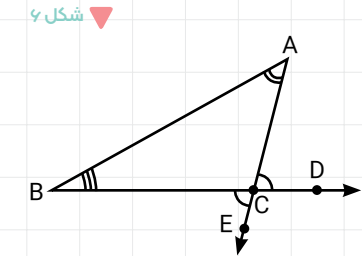


یکی از روش‌های حل مسئله یا اثبات بعضی قضیه‌ها در هندسه رسم خط‌های اضافی است. در واقع خط‌های اضافی قسمت‌های پنهان یک شکل در هندسه هستند. مسلماً در اینجا با توجه به مقدمه‌هایی که در مورد نامساوی بودن زاویه‌ها بیان کردیم، این تصور در ذهن ما تداعی می‌شود که اگر قضیه ما حل شده باشد، ثابت شده است که: $\angle DCB > \angle B$. پس باید نیم‌خطی با ابتدای C ، مانند CN ، از درون $\angle DCB$ گذشته باشد که اندازه $\angle NCB$ با اندازه $\angle B$ برابر باشد (شکل ۷).

در واقع این مفهوم‌ها دقیقاً مشابه نامساوی بین عددهای حقیقی هستند. وقتی a و b دو عدد حقیقی باشند، به طوری که: $a < b$ ، آنگاه عدد حقیقی مثبت r وجود دارد به طوری که: $b = a + r$. بنابراین، اگر B ، A و C سه نقطه روی یک خط باشند که B بین A و C واقع باشد (شکل ۵)، آنگاه: $AB + BC = AC$. در نتیجه: $AC > AB$. زیرا اندازه پاره‌خط BC عددی مثبت است.

شکل ۵
قضیه زاویه بیرونی

اکنون به یکی از نامساوی‌های مهم و اساسی هندسه می‌رسیم که از نظر مقایسه با سایر هندسه‌های غیراقلیدسی از اهمیت زیادی برخوردار است. این قضیه به «قضیه زاویه بیرونی» معروف است. در شکل ۶، $\angle BAC$ ، $\angle CBA$ و $\angle ACB$ که گاهی آن‌ها را به $\angle A$ ، $\angle B$ و $\angle C$ نیز نشان می‌دهیم، زاویه‌های درونی مثلث ABC هستند.



اما $\angle ACD$ را زاویه بیرونی نظیر رأس C می‌نامیم. در اینجا نیم‌خط $\overline{CD}$ را نیم‌خط متقابل نیم‌خط $\overline{CB}$ می‌نامند. پس D نقطه‌ای روی نیم‌خط متقابل نیم‌خط $\overline{CB}$ است. به عبارت دیگر، هر زاویه را که رأس آن رأس مثلث و یک ضلع آن شامل یک ضلع مثلث و ضلع دیگر آن نیم‌خط متقابل یا همان امتداد نیم‌خط شامل ضلع دیگر مثلث است، زاویه بیرونی نظیر آن رأس می‌نامیم. توجه داشته باشید که در هر رأس مثلث همواره دو زاویه بیرونی نظیر آن وجود دارد که متقابل به رأس هستند. در همان شکل ۷ $\angle BCE$ نیز زاویه بیرونی نظیر رأس C است. برای حل مسئله‌ها، بسته به اینکه به کدام نیاز باشد، آن را در نظر می‌گیریم. اما در محاسبه مجموع